

Théorie des ordres denses

Julien Devevey

2018-2019

Ref : DNR - Introduction à la logique p. 130

Définition 1. Soit T_0 la théorie écrite sur le langage $\mathcal{T}_0 = \{<, =\}$ et constituée des formules suivantes :

- $(O_1) \forall x, y \neg \{x < y \wedge y < x\}$
- $(O_2) \forall x, y, z \{x < y \wedge y < z \rightarrow x < z\}$
- $(O_3) \forall x, y \{x < y \vee x = y \vee y < x\}$
- $(O_4) \forall x, y \exists z \{x < y \rightarrow x < z \wedge z < y\}$
- $(O_5) \forall x \exists y \{x < y\}$
- $(O_6) \forall x \exists y \{y < x\}$

T_0 est la théorie des ordres stricts (O_1 et O_2), totaux (O_3), denses (O_4), sans plus grand ni plus petit élément (O_5 et O_6).

Proposition 2. Les modèles de T_0 sont infinis. De plus, certains sont non isomorphes. T_0 est non contradictoire.

Démonstration.

Pour le premier point, on remarque qu'un ensemble totalement ordonné fini admet un plus grand élément.

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont tous les deux des modèles de T_0 . Pourtant ils ne sont pas isomorphes car l'un est dénombrable mais pas l'autre.

$\mathbb{R}$ est bien un modèle de T_0 , elle n'est donc pas contradictoire. $\square$

Définition 3. On dit qu'une théorie admet l'élimination des quantificateurs si pour toute formule close F , il existe une formule close G sans quantificateurs telle que $T \vdash F \leftrightarrow G$.

Théorème 4. T_0 admet l'élimination des quantificateurs.

Démonstration.

On admettra qu'il suffit que pour toute formule sans quantificateurs $F[x_1, \dots, x_n]$, il existe une formule $G[x_1, \dots, x_n]$ telle que $T \vdash \forall x_1, \dots, x_n \{ \exists x F \leftrightarrow G \}$.

Commençons par remarquer qu'une formule sans quantificateurs est équivalente sur T_0 à la forme disjonctive $\bigvee_k \bigwedge_l H_{kl}$, où les H_{kl} ont une forme à déterminer. Comme $T_0 \vdash \neg(x = y) \leftrightarrow x < y \vee y < x$ et $T_0 \vdash \neg(x < y) \leftrightarrow y < x \vee x = y$, on a H_{kl} de l'une des formes suivantes : $x = x, x = x_i, x_i = x_j, x < x, x < x_i, x_i < x_j, x_i < x$.

On peut de plus éliminer les formules $x = x, x_i = x_i, x < x, x_i < x_i$ qui sont équivalentes soit à $\perp$ ou $\top$. On peut aussi supprimer les $\perp$ et $\top$.

Comme on a $\vdash \exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$, on peut se ramener au cas d'une formule K de la forme $\exists x \bigwedge_r K_r$ où les K_r sont des formules atomiques de l'une des formes suivantes : $x = x_i, x_i = x_j, x_i < x_j, x_i < x, x < x_i$. On peut alors distinguer deux cas, suivant si un des K_r est de la forme $x = x_i$:

Si K contient un $x = x_i$ alors la formule K est équivalente à $K[x := x_i]$.

Sinon, on peut classer les K_r en deux groupes : ceux qui contiennent x et les autres : on écrit $K_1 \wedge \exists x K_2$, formule équivalente à K où on a posé $K_i = \bigwedge_n K_{i,n}, i \in \{1, 2\}$ et les $K_{1,n}$ sont de la forme $x_i = x_j$ ou $x_i < x_j$, tandis que les $K_{2,n}$ se classent en $x_i < x$ pour $i \in I$ ou $x < x_j$ pour $j \in J$. Alors, si $I \cap J \neq \emptyset$, la formule est équivalente à $\perp$. Si I ou J est vide, la formule est équivalente à $\top$ par O_5 ou O_6 . Enfin, dans le dernier cas, $\exists x K_2$ est équivalente à $\bigwedge_{i \in I, j \in J} x_j < x_i$ par densité de l'ordre. Ce raisonnement conclut alors la question. $\square$

Corollaire 5. T_0 est complète et décidable.

Démonstration.

Soit F une formule close, qu'on peut alors supposer sans quantificateurs d'après ce qui précède. F est alors combinaison booléenne de formules atomiques closes. On a juste à vérifier alors que pour toute combinaison booléenne B de formules atomiques closes, on a $T \vdash B$ ou $T \vdash \neg B$, et la preuve par récurrence sur la taille de B est immédiate et montre aussi que la théorie est récursive, donc la théorie est complète et décidable. $\square$